Tema 6. Variables Aleatorias Discretas

Presentación y Objetivos.

En esta unidad se presentan algunos ejemplos estándar de variables aleatorias discretas relacionadas de diversas formas dependiendo de su especificidad. Servirán como modelos para situaciones reales, según sea el grado de complejidad y sofisticación de las mismas. Es importante entender bien sus características para poder identificar qué situaciones se adaptan a cada una, reconocer sus parámetros y calcular probabilidades de sucesos concretos.

Los **Objetivos** de esta Unidad Didáctica son:

1. Conocer a nivel conceptual y operativo las distribuciones discretas más importantes, motivadas a través de ejemplos.
2. Conocer qué tipo de aproximaciones existen entre estas distribuciones.
3. Desarrollar la habilidad de asociar un modelo determinado de los estudiados, a una situación real concreta.

Esquema Inicial.

1. Distribución degenerada en un punto.
2. Distribución Uniforme discreta.
3. Distribución de Bernoulli.
4. Distribución Binomial.
5. Distribución Geométrica.
6. Distribución Binomial negativa.
7. Distribución de Poisson.

Desarrollo del Tema

1. Distribución degenerada en un punto

Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución degenerada en un punto h si su función de probabilidad es

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = h \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Su función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < h \\ 1 & si \quad x \geq h \end{cases}$$

2.1 Medidas características

- Media: $E(X) = h \cdot 1 = h$
- Varianza: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = h^2 \cdot 1 - h^2 = 0$
- Momentos:

$$\alpha_k = E(X^k) = h^k \cdot 1 = h^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = E[(X-h)^k] = \sum_x (x-h)^k p(x) = (h-h)^k p(h) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots$$

2. Distribución uniforme discreta sobre n puntos

Se dice que una variable aleatoria X tiene una **distribución Uniforme sobre n puntos** $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ si su función de probabilidad es

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Si los n puntos ordenados son $\{x_{(1)}, \dots, x_{(n)}\}$ la función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad x_{(1)} \le x < x_{(2)} \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{k}{n} & \text{si} \quad x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, \quad k = 2, \dots, n-1 \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ 1 & \text{si} \quad x \ge x_{(n)} \end{cases}$$

2.1 Medidas características

- Media:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \bar{x}$$

- Varianza:

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2$$

- Momentos:

$$\alpha_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = E[(X-\bar{x})^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

3. Distribución de Bernoulli

Supóngase un experimento en el que sólo hay dos resultados posibles: la ocurrencia o no de un determinado suceso. Se llama sin pérdida de generalidad,

Éxito a la ocurrencia del suceso

Fracaso a la no ocurrencia del suceso

El espacio muestral es, por tanto, $\Omega = \{Éxito, Fracaso\} = \{E, F\}$. Además, supóngase que cada vez que se realiza el experimento, $P(E) = p$ y $P(F) = 1 - p$. A este experimento se le asocia la variable aleatoria de Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si sale éxito} \\ 0 & \text{si sale fracaso} \end{cases}$$

Se dice entonces que una variable aleatoria X tiene una **distribución de Bernoulli** de parámetro $p \in [0,1]$ y se denota por $X \sim Bern(p)$, cuando su función de probabilidad es

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p = q & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

que es equivalente a $P(X = x) = p^x q^{1-x}$ para $x = 0, 1$. La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ q & \text{si} & 0 \leq x < 1 \\ 1 = p + q & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

3.1 Medidas características

- Media: $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$
- Varianza: V(X) = $E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$
- Momentos:

$$\alpha_k = E(X^k) = 1^k \cdot p + 0^k \cdot q = p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
$$\mu_k = E[(X - p)^k] = (1-p)^k p + (0-p)^k q, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Como se puede observar, tanto la media como la varianza dependen de p. La varianza $V(X)$ será máxima cuando $p = \frac{1}{2}$, en este caso existe la mayor incertidumbre respecto al resultado y la mayor variabilidad: aparecerán a largo plazo igual número de ceros que de unos.

A continuación se estudian tres distribuciones asociadas a la distribución de Bernoulli:

- Binomial
- Geométrica
- Binomial negativa

4. Distribución Binomial

Supóngase el experimento aleatorio que consiste en realizar n pruebas independientes de Bernoulli, y que interesa contar el número de éxitos obtenidos en total en esas n repeticiones del experimento. Sea X la variable aleatoria

$$X = número\ de\ éxitos\ en\ n\ pruebas\ independientes\ de\ Bernoulli$$

cuyo espacio muestral asociado es $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

La probabilidad de obtener k éxitos, independientemente de cuál sea la ordenación de fracasos-éxitos, es $p^k q^{(n-k)}$ y el número total de ordenaciones posibles es

$$PR^n_{k,n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Así, se dice que la variable aleatoria X tiene una **distribución Binomial** de parámetros $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$ ($X \sim B(n, p)$), si su función de probabilidad es

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Observaciones:

- $Bern(p) \equiv B(1, p)$
- Una variable aleatoria distribuida según una Binomial, se puede expresar como suma de variables aleatorias independientes de Bernoulli. Es decir, $X \sim B(n, p)$ se puede representar como
$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{donde} \quad X_i \sim Bern(p)$$
- La distribución Binomial $B(n, p)$ es reproductiva respecto de n, es decir, dadas dos variables aleatorias X, Y independientes con $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$ entonces
$$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$
- Utilizando el binomio de Newton se ve que es función de probabilidad:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

La función de distribución es

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} P(X = i) = \sum_{i \leq x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Esta fórmula, aunque hay tablas para $F(x)$ y $P(X = i)$, no es manejable. Sin embargo, tiene una clara representación gráfica como se puede observar en la figura 1.

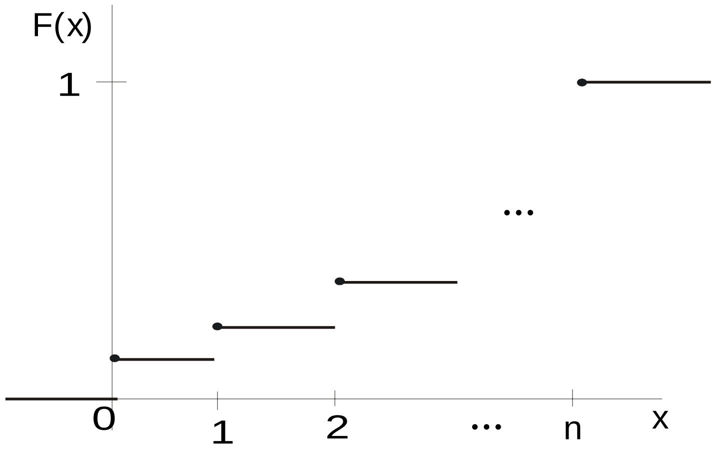

Figura 1: Función de Distribución de una variable aleatoria Binomial

4.1 Medidas características

- Media:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np$$

- Varianza:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = npq$$

Ejemplo 1: La longitud de las ráfagas de fotos tomadas por una cámara réflex digital es de 7 fotografías. La probabilidad de que una de esas fotos tenga muy poco ruido con poca luz ambiente es de 0,25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al disparar una ráfaga se obtengan exactamente 5 fotos con muy poco ruido?
b) Si se disparan dos ráfagas consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de no obtener ninguna foto con muy poco ruido?
c) Si se disparan dos ráfagas consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos una ráfaga entera con muy poco ruido?

Se define la variable aleatoria

$$X = número\ de\ fotos\ con\ muy\ poco\ ruido\ en\ una\ ráfaga\ (7\ fotos)$$

que tiene una distribución Binomial con $n = 7$ y $p = 0{,}25$, es decir $X \sim B(7, p = 0{,}25)$

a) La probabilidad pedida es

$$P(X = 5) = \binom{7}{5} 0{,}25^5 (1 - 0{,}25)^2 = 21 \cdot 0{,}00097 \cdot 0{,}5625 = 0{,}011458$$

b) Si se disparan dos ráfagas consecutivas, se obtienen 14 fotos. Ahora se considera la variable aleatoria

$$Y = número\ de\ fotos\ con\ muy\ poco\ ruido\ en\ dos\ ráfagas$$

que por la reproductividad de la Binomial tiene una distribución $B(14; 0{,}25)$ y la probabilidad buscada es

$$P(Y = 0) = \binom{14}{0} 0{,}25^0 (1 - 0{,}25)^{14} = 0{,}75^{14} = 0{,}017817$$

c) Es necesario definir la variable aleatoria

$$Y' = número\ de\ ráfagas\ enteras\ con\ muy\ poco\ ruido, de\ las\ 2\ ráfagas$$

cuya distribución es una Binomial $B(2, p')$ donde p' es la probabilidad de obtener una ráfaga entera con muy poco ruido, que se obtiene a partir de la variable aleatoria X como la probabilidad de que todas las fotos de la ráfaga tengan muy poco ruido, es decir:

$$p' = P(X = 7) = \binom{7}{7} 0{,}25^7 0{,}75^0 = 0{,}000061$$

Así, $Y' \sim B(2;\ 0{,}000061)$ y se pide

$$P(Y' \geq 1) = 1 - P(Y' = 0) = 1 - \binom{2}{0} p'^0 (1 - p')^2 = 1 - (1 - p')^2 \cong 0{,}000122$$

5. Distribución Geométrica

Considérese el mismo mecanismo de generación de sucesos que en la distribución de Bernoulli, una sucesión de pruebas independientes con dos posibles resultados: éxito o fracaso. Se define la variable aleatoria

$$X = número\ del\ experimento\ en\ el\ que\ aparece\ éxito\ por\ primera\ vez$$

Si la probabilidad de éxito es p, la función de probabilidad de la **distribución Geométrica** es

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p, \qquad x = 1, 2, \ldots$$

y denotamos la distribución como $X \sim Geo(p)$.

En general, para un experimento aleatorio en el que A es un suceso de su espacio muestral correspondiente, con $P(A) = p$, se realizan diversas pruebas independientes de ese experimento hasta que se obtiene el suceso A. La probabilidad de que aparezca el suceso A por primera vez en la prueba número x es la misma que la del suceso expresado por $\underbrace{A^c A^c \cdots A^c}_{x-1} A$ y será $(1 - p)^{x-1} p$. Y la variable aleatoria igual al número de pruebas necesarias hasta que aparece por primera vez el suceso A, se llamará geométrica.

Se ve fácilmente que la función anterior define una función de probabilidad:

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = p \sum_{x=1}^{\infty} (1 - p)^{x-1} = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1$$

La función de distribución será, para $k \leq x < k + 1,\ k = 1, 2, \ldots$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{k} p(1 - p)^{i-1} = p \frac{(1 - p)^k - 1}{1 - p - 1} = 1 - q^k$$

y cero en el resto. Se ha utilizado la fórmula de la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica de razón r, que es $\frac{a_n r - a_1}{r - 1}$.

5.1 Medidas características

- Media:
$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, pq^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1} = p\frac{1}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$
donde se ha utilizado que si $q \in (0,1)$:
$$S(q) = \sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{q}{1-q}$$
$$S'(q) = \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}$$
- Varianza:
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

A veces, se define la variable aleatoria

$$X = número\ de\ fracasos\ antes\ del\ primer\ éxito$$

y entonces la función de probabilidad es

$$P(X = x) = (1-p)^x p, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Esta variable se conoce con el nombre de **Geométrica Generalizada** de parámetro p. En este caso

- Media:
$$E(X) = \frac{q}{p}$$
- Varianza:
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Ejemplo 2: Un polluelo de gaviota que quiere aprender a volar realiza intentos hasta que lo consigue. La probabilidad de conseguirlo en cada uno de esos intentos es $p = 0{,}4$. Suponiendo que dichos intentos son independientes, calcular la probabilidad de que necesite más de cuatro intentos para volar por primera vez.

La variable aleatoria $X = número\ del\ intento\ en\ el\ que\ el\ polluelo\ vuela\ por\ primera\ vez$ sigue una distribución Geométrica de parámetro $p = 0{,}4$. La función de probabilidad es

$$P(X = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Y hay que calcular la probabilidad $P(X > 4)$.

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{4} q^{k-1}p = 1 - p(1 + q + q^2 + q^3) = 0{,}1296$$

Otra forma de resolverlo es definiendo la variable aleatoria

$$X' = número\ de\ intentos\ fallidos\ antes\ del\ primer\ vuelo$$

que se distribuye según una Geométrica Generalizada de parámetro $p = 0{,}4$, y su función de probabilidad es

$$P(X' = k) = q^k p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

y la probabilidad pedida es

$$P(X' \geq 4) = 1 - P(X' < 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} q^k p = 1 - p(1 + q + q^2 + q^3)$$

6. Distribución Binomial Negativa

Es el caso en el que se observa una secuencia de pruebas independientes, con probabilidad de éxito en cada una de ellas igual a p, pero en lugar de fijar el número total n de ensayos y contar el número de éxitos (como se hace en la distribución Binomial), se continúa con el número de pruebas hasta que han ocurrido exactamente n éxitos. Se define entonces la variable aleatoria

$$X = número\ de\ fracasos\ antes\ del\ n - ésimo\ éxito$$

que toma valores $x = 0, 1, 2, \ldots$ La variable aleatoria tomará el valor x en sucesos del tipo $\underbrace{FF \cdots FF}_{x}\underbrace{EE \cdots EE}_{n}$, cuya probabilidad es, por independencia, $q^x p^n$. Pero, ¿cuántos sucesos de este tipo hay? Todos lo que surjan al dejar fijo el último éxito y combinar los x fracasos y los $n - 1$ éxitos restantes. Es decir, se reparten $n + x - 1$ sitios para los x fracasos, ya que el resto son éxitos.

Formas de colocar x fracasos en $n + x - 1$ sitios: $\binom{n+x-1}{x}$

Formas de colocar $n - 1$ éxitos en $n + x - 1$ sitios: $\binom{n+x-1}{n-1}$

Evidentemente, ambos números combinatorios son iguales (ver las propiedades de estos números en la unidad didáctica 3) y la función de probabilidad es

$$P(X = x) = \binom{n + x - 1}{x} q^x p^n, \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una **distribución Binomial Negativa** ($X \sim BN(n, p)$) si su función de probabilidad es la anterior.

Observación: La distribución Binomial Negativa $BN(n,p)$ es reproductiva respecto de n, es decir, dadas dos variables aleatorias X,Y independientes con $X \sim BN(n_1,p)$, $Y \sim BN(n_2,p)$ entonces $X+Y \sim BN(n_1+n_2,p)$.

Si se considera $n=1$ se obtiene la distribución Geométrica Generalizada. Así, se puede considerar la Binomial Negativa como una generalización de la distribución Geométrica. Las funciones $F(x)$ y $P(X=x)$ están tabuladas, pero normalmente se obtienen de la distribución Binomial, ya que si $X \sim BN(n,p)$ entonces $P(X \leq x) = P(Y \geq n)$ donde $Y \sim B(n+x,p)$. Es decir:

$$F_X(x) = 1 - F_Y(n-1), \quad \text{si} \quad X \sim BN(n,p) \quad \text{e} \quad Y \sim B(n+x,p)$$

6.1 Medidas características

- Media:

$$E(X) = \frac{nq}{p}$$

- Varianza:

$$V(X) = \frac{nq}{p^2}$$

Ejemplo 3: Para tratar a un paciente de una afección de pulmón han de ser operados, en operaciones independientes, sus 5 lóbulos pulmonares. La técnica a utilizar es tal que si todo va bien, lo que ocurre con probabilidad de 4/11, el lóbulo queda definitivamente sano, pero si no es así, se deberá esperar el tiempo suficiente para intentarlo posteriormente de nuevo. Se practicará la cirugía hasta que 4 de sus 5 lóbulos funcionen correctamente.

a) ¿Cuál es el valor esperado de intervenciones que se espera que deba padecer el paciente?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten 10 intervenciones?

Sea la variable aleatoria

$$X = número\ de\ operaciones\ fallidas\ antes\ de\ que\ 4\ lóbulos\ funcionen \sim BN\left(4, \frac{4}{11}\right)$$

(es decir, número de operaciones fallidas hasta obtener $n=4$ éxitos)

a) Como se pide el número esperado de intervenciones, se define la v.a

$$Y = número\ total\ de\ intervenciones = X + n = X + 4$$

Así, el número medio de intervenciones que se espera padecerá el paciente es

$$E(Y) = E(X+4) = E(X) + 4 = \frac{nq}{p} + 4 = \frac{4\frac{7}{11}}{\frac{4}{11}} = 7 + 4 = 11$$

donde $E(X) = 7$ es el número medio de operaciones fallidas hasta el cuarto éxito.

b) La probabilidad pedida es

$$P(Y=10)=P(X=6)=\binom{4+6-1}{6}\left(\frac{7}{11}\right)^6\left(\frac{4}{11}\right)^4 \cong 0{,}097539$$

7. Distribución de Poisson

Consideremos un experimento en el que observamos la aparición de sucesos puntuales sobre un soporte continuo, digamos el tiempo. Por ejemplo, averías de máquinas en el tiempo, llegadas de aviones a un aeropuerto, defectos en una plancha de metal, etc. Supondremos que el proceso se caracteriza porque:

1. Es estable: produce, a largo plazo, un número medio de sucesos constante λ por unidad de tiempo (o espacio, área, etc.)
2. Los sucesos aparecen aleatoriamente de forma independiente, es decir, el proceso no tiene memoria: el hecho de conocer el número de sucesos en un intervalo de longitud constante no ayuda a predecir el número de sucesos en el siguiente.

La variable aleatoria que cuenta el número de sucesos independientes que suceden a velocidad constante en un intervalo de longitud fija se llama variable aleatoria de Poisson. Es pues una variable aleatoria discreta que toma valores en $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$. Se define como

$$X = número\ de\ sucesos\ en\ un\ intervalo\ de\ longitud\ fija$$

y su función de probabilidad es

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k=0,1,2,\ldots \quad y \quad \lambda>0$$

Se dice que la variable aleatoria X tiene una **distribución de Poisson** de parámetro λ ($X\sim\mathcal{P}(\lambda)$) donde λ representa el número medio de sucesos en ese intervalo de longitud fija. Por tanto, hay que tener cuidado con las unidades en las que viene medido λ.

Ejemplo 4: Supóngase que se define la variable aleatoria X como el número de trabajos que se procesan por día en un Centro de Cálculo y se tiene el dato de que en media llegan 5 trabajos por hora. Entonces, si el Centro de Cálculo está abierto un total de 12 horas

$$\lambda = 12 \text{ horas/día } \cdot 5 \text{ trabajos/hora} = 60 \text{ trabajos/día}$$

Se ve fácilmente que es función de probabilidad:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

Observación: La distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ es reproductiva respecto de λ, es decir, dadas X, Y variables aleatorias independientes con $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ entonces $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Su función de distribución es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}$$

Esta función se encuentra tabulada para distintos valores de x y de λ.

7.1 Medidas características

- Media:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

  haciendo el cambio de variable $y = x - 1$.

- Varianza: La varianza coincide con la media, es característico de la distribución de Poisson,

$$V(X) = E(X) = \lambda$$

Ejemplo 5: En un Centro de Cálculo las máquinas se averían siguiendo una distribución de Poisson de media 3 averías por semana.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no se estropee ninguna máquina en una semana?
b) Calcular la probabilidad de observar menos de 5 averías en un mes. Supóngase que un mes tiene 4 semanas.

a) Se define la variable aleatoria

$$X = número\ de\ averías\ en\ una\ semana$$

que sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3$ averías/semana. Se pide:

$$P(X = 0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = e^{-3} = 0{,}04978$$

b) Ahora hay que definir la variable aleatoria

$$Y = número\ de\ averías\ en\ un\ mes$$

cuya distribución es Poisson con parámetro $\lambda = 3\,\frac{averías}{semana} \times 4\,\frac{semanas}{mes} = 12\,\frac{averías}{mes}$. La probabilidad pedida es

$$P(Y < 5) = P(Y \leq 4) = F(4) = e^{-12}\left(\frac{12^0}{0!} + \frac{12^1}{1!} + \frac{12^2}{2!} + \frac{12^3}{3!} + \frac{12^4}{4!}\right) = 0{,}0076$$

7.2 Aproximaciones

La distribución de Poisson se obtiene como límite de la distribución Binomial cuando $n \to \infty$, de manera que se puede considerar un continuo de elementos, y $p \to 0$, de forma que el número de sucesos, np, permanezca constante. Por lo tanto,

$$B(n, p) \xrightarrow[n\to\infty, p\to 0, np\to\lambda]{} \mathcal{P}(\lambda)$$

En la práctica, se suele usar la distribución de Poisson cuando en la $B(n, p)$ se verifica:

$$np < 5, \qquad p < 0{,}1 \quad \text{y} \qquad n > 30$$

Ejemplo 6: Cierta enfermedad tiene una probabilidad muy baja de ocurrir, $p = 1/100.000$. Calcular la probabilidad de que en una determinada ciudad de 400.000 habitantes haya más de 3 personas con dicha enfermedad. ¿Cuál es el número esperado de personas enfermas?

Si se considera la variable aleatoria X que contabiliza el número de personas, de entre las 400.000, que padece la enfermedad,

$$X \sim B(n = 400.000, p = 0{,}00001)$$

Como se dan las condiciones anteriormente descritas, se puede aproximar a una variable de Poisson, $X \sim \mathcal{P}(np = \lambda = 4)$. Por tanto,

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3} e^{-4}\frac{4^x}{x!} = 1 - e^{-4}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right) = 0{,}556$$

El número esperado de personas enfermas será $E(X) = \lambda = 4$.